La Lógica de lo Emergente

Haces en los Fundamentos de la Mecánica Cuántica

Nicolás Medina S.

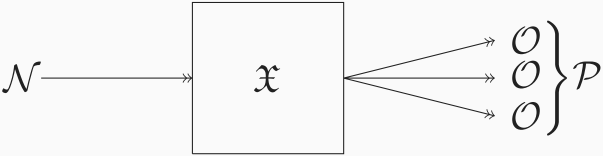
G. Caos & Complejidad / G. Lógica & Geometría

October 1, 2018

Teorema (S. Abramsky et. al., 2011):
La existencia de una sección global para un modelo empírico implica la existencia de un modelo determinista de variables ocultas que lo describe.

Modelos Empíricos

$$\text{Sistema Físico } \mathfrak{X} = \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{N}\text{: Observables} \\ \mathcal{O}\text{: Medidas} \\ \mathcal{P}\text{: Distribuciones} \end{array} \right.$$



Ejemplo

$$
\begin{array}{c|c}
\text{A B} & \overbrace{\begin{array}{cccc} (0,0) & (0,1) & (1,0) & (1,1) \end{array}}^{\mathcal{O}} \\ \hline
\underbrace{\begin{array}{c} \text{a b} \\ \text{a' b} \\ \text{a b'} \\ \text{a' b'} \end{array}}_{\mathcal{N}} & \underbrace{\begin{array}{cccc}
P_{00|ab} & P_{01|ab} & P_{10|ab} & P_{11|ab} \\
P_{00|a'b} & P_{01|a'b} & P_{10|a'b} & P_{11|a'b} \\
P_{00|ab'} & P_{01|ab'} & P_{10|ab'} & P_{11|ab'} \\
P_{00|a'b'} & P_{01|a'b'} & P_{10|a'b'} & P_{11|a'b'}
\end{array}}_{\mathcal{P}}
\end{array}
$$

Bell

λ es una variable oculta si:

$$p_{ab|xy} = \int_{\Lambda} d\lambda q(\lambda) p(a|x,\lambda) p(b|y,\lambda)$$

Sin embargo (S. Abramsky, L. Hardy; 2012):

$$\sum_i P_i \leq N - 1$$

Ejemplo

eventos son proposiciones

$$\phi_1 = a \wedge b$$
$$\phi_2 = a \wedge b'$$
$$\phi_3 = a' \wedge b$$
$$\phi_4 = \neg(a' \wedge b')$$

$$P_{11|ab} + P_{11|ab'} + P_{11|a'b'} + (1 - P_{11|a'b'}) \leq 3 \qquad \text{(CHSH)}$$

Encuentre las Diferencias

Clásico

$$\mathcal{N} = \{f \in C(\mathbb{X})\}$$

$$\int \rho dx = 1$$

$$\dot{\rho} = \{H, \rho\}$$

$$\{P_\lambda\}, \sum P_\lambda = 1, P_\lambda P\mu = \delta_{\lambda\mu}$$

$$f(x) = \sum_\lambda f_\lambda P_\lambda(x)$$

$$p_\lambda = \int P_\lambda \rho dx$$

$$\rho \to \rho_\lambda = P_\lambda \rho / p_\lambda$$

Cuántico

$$\mathcal{N} = \{A \in B(\mathbb{H})\}$$

$$\mathrm{tr}(\rho) = 1, \text{(pos. sem. def.)}$$

$$\dot{\rho} = -(i/\hbar)[H, \rho]$$

$$\{P_\lambda\}, \sum P_\lambda = 1, P_\lambda P\mu = \delta_{\lambda\mu}$$

$$A = \sum_\lambda A_\lambda P_\lambda$$

$$p_\lambda = \mathrm{Tr}(P_\lambda \rho)$$

$$\rho \to \rho_\lambda = \frac{P_\lambda \rho P_\lambda}{p_\lambda}$$

Clásico:

$$\rho = \sum_{\lambda} p_\lambda \rho_\lambda$$

Cuántico:

$$\rho \neq \sum_{\lambda} p_\lambda \rho_\lambda$$

Ejemplo

$$\rho_{AB}^{Bell} = |00\rangle\langle 00| + |00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|$$

$$\rho_{AB} \neq p_A\rho_A + p_B\rho_B = \frac{\mathbf{I}_A \otimes \mathbf{I}_B}{4}$$

Lo auténticamente cuántico, es la no-separabilidad.

Teorías de Probabilidad Diferentes

Clásico

f. car. P_λ

$\{P_\lambda\} \leftrightarrow \sigma -$ álgebra (Borel)

Cuántico

Proy. a subesp. P_λ

$\{P_\lambda\} \leftrightarrow (?)$

¿Cuál es la estructura de eventos (proposicional) de la Mecánica Cuántica?

La Categoría de los Contextos

Sea $\mathcal{C}(B(\mathbb{H}))$ la familia de todas las subálgebras conmutativas (contextos) de $B(\mathbb{H})$.
Sea $i_{PQ} : Q \hookrightarrow P$, la inclusión entre álgebras para $P, Q \in \mathcal{C}(B(\mathbb{H}))$ y $Hom_{\mathcal{C}}$ la colección de todas estas inclusiones.
$\mathcal{C} = (\mathcal{C}(B(\mathbb{H})), Hom_{\mathcal{C}})$ forma la categoría de los contextos.

El Álgebra Espectral

Cada contexto V es también una categoría. Un morfismo entre objetos $A, B \in V$ se define como $f(A) = \sum f(A_\lambda)P_\lambda = B$ Se tiene entonces el funtor álgebra espectral

$$\mathbf{W} : V \to \mathcal{P}(V)$$

$$\mathbf{W}(A) = W_A = \{P^A_\lambda\}$$
$$\mathbf{W}(f(A) = B) = i_{BA} : W_B \to W_A$$

$\mathcal{P}(V)$ es un retículo booleano (Clasicalidad Local).

El Prehaz Espectral

Sea ahora el funtor Σ (el prehaz espectral):

$$\Sigma : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$$

$\Sigma(V)$ es el espectro de Gel'fand de V

$\Sigma(i_{V'V}) : \Sigma_V \to \Sigma'_V :: \lambda \mapsto \lambda|V'$

Σ sobre $\mathcal{P}(V)$ genera todos los homomorfismos de un elemento de $P(V)$ en $\{0, 1\}$

Teorema de Kochen-Specker:
Para $\dim(\mathbb{H})>2$, el prehaz espectral Σ no posee secciones globales.

La Transición Clásico-Cuántico

Es un problema topológico:

¿Cómo determinar si un sistema posee secciones globales?

Realización Geométrica

Se define el funtor Nervio:

$$\text{Nervio} : \mathbf{Cat} \to \mathbf{SimpSet}$$

Se define el funtor realización geométrica:

$$|-| : \mathbf{SimpSet} \to \mathbf{Top}$$

La Entropía es Contextual

A cada $V \in \mathcal{C}$ se le asigna su base de proyectores maximal $\{P_1, ..., P_k\}$. Dado un sistema en un estado arbitrario ρ, a cada contexto se le asigna una distribución de probabilidad $P_C = \{p_1, ..., p_k\}$. Se define la entropía contextual:

$$H(P_C) = -\sum p_i \ln p_i$$

La Entropía es Universal

Teorema (J. Baez et. al, 2011): El único funtor $F : \mathbf{FinProb} \to [0, \infty)$ continuo y lineal convexo, tiene la forma:

$$F(f) = c(H(V) - H(W))$$

Métrica

Se define así una métrica sobre la realización geométrica de $\mathcal{C}$:

$$d_\rho = c(H(V) - H(W))$$

Topología

La existencia de d_ρ induce las siguientes topologías sobre las categorías $\mathbf{Set}^{op}$ y $\mathcal{C}$:

Lawvere-Tierney

$$j_\rho(V) = \bigvee\{W \in \mathcal{D}(\mathcal{C}) | \mathrm{Cl}_\mu(V) = \mathrm{Cl}_\mu(W)\}$$

Grothendieck

$$J_\mu(X) = \{S \in \mathcal{D}(\downarrow V) | \mathrm{Cl}_\mu(\downarrow X) = \mathrm{Cl}_\mu(S)\}$$

Prospecto

Hacificar el prehaz espectral con base a esta topología indica la mejor aproximación clásica al estado cuántico que determina la métrica. Un estado es clásico si el prehaz y la hacificación tienen la misma información.

Determinar la evolución de esta estructura en el tiempo en la medida que $\rho(t)$